УДК 515 (075)

ТЕОРИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Д. П. Дрягин, канд. техн. наук, доцент
Сумский государственный университет, ул. Р.-Корсакова, 2, Сумы, 40007

Разработана новая аналитико – геометрическая теория трех натуральных прямоугольных треугольников, необходимая для нахождения величины отрезка прямой общего положения, расположенного в трехмерном пространстве. Теоретически обоснованы известные графические «Метод Монжа» и «Метод прямоугольных треугольников».

Нахождение натуральной величины (НВ) отрезка прямой общего положения относится к числу задач, решаемых проективной (начертательной) геометрией.

Весьма эффективное решение этой задачи предложил Г.Монж [1], в то же время в известной литературе не приводится аналитического обоснования как «метода Монжа», так и «метода прямоугольного треугольника» для нахождения НВ отрезка прямой общего положения [2,3,4].

В данной работе рассматривается аналитико-геометрический подход к решению поставленной задачи на основе введения понятия о натуральном прямоугольном треугольнике (НПТ), приводятся обоснования и особенности определения гипотенузы **(Г)** НПТ в ортогональной системе трех плоскостей, составляющих первый октант.

Натуральным прямоугольным треугольником назовем треугольник, гипотенуза **Г** которого является отрезком прямой общего положения, а катеты его – суть натуральные проекции на две взаимно перпендикулярные плоскости.

Данное определение НПТ требует проекционного отчуждения его катетов по двум взаимно перпендикулярным направлениям, что приводит к потере НПТ на плоскостях проекций.

Для нахождения НПТ на одной из трех плоскостей проекций, содержащей лишь один натуральный катет, приходится находить второй соответственный натуральный катет на другой плоскости проекций. После нахождения второго натурального катета задача об определении НВ отрезка прямой общего положения, т.е. гипотенузы **Г** НПТ, становится тривиальной.

На рис.1 изображены в системе трех взаимно перпендикулярных плоскостей π_1 , π_2 и π_3, составляющих первый октант, три натуральных прямоугольных треугольника I, II и III, плоскости которых перпендикулярны указанным плоскостям проекций. Катеты НПТ, не параллельные осям X , Y и Z, отмечены соответственно символами K_I, K_{II} и K_{III}, а параллельные этим осям - символами K_{IZ} , K_{IIY} и K_{IIIX}.

Рис.1 также подтверждает, что натуральный катет K_I равен проекции гипотенузы **Г** на плоскость π_1, натуральный катет K_{II} равен проекции гипотенузы **Г** на π_2 и натуральный катет K_{III} равен проекции гипотенузы **Г** на плоскость π_3, т.к. указанные натуральные катеты и соответствующие им проекции взаимно параллельны. Поэтому на рис.1 и далее проекции на π_1 , π_2 и π_3 обозначены как натуральные катеты.

Итак, установлено, что проекциями отрезка прямой общего положения на плоскости π_1 , π_2 и π_3 являются натуральные катеты K_I, K_{II} и K_{III} трех натуральных прямоугольных треугольников I , II и III .

Натуральные катеты K_{IZ}, K_{IIY} и K_{IIIX} на эпюрах Монжа не наблюдаются в сопряжении с катетами K_I, K_{II} и K_{III}, что создает определенные затруднения при нахождении гипотенузы **Г**, иначе - натуральной величины отрезка прямой общего положения.

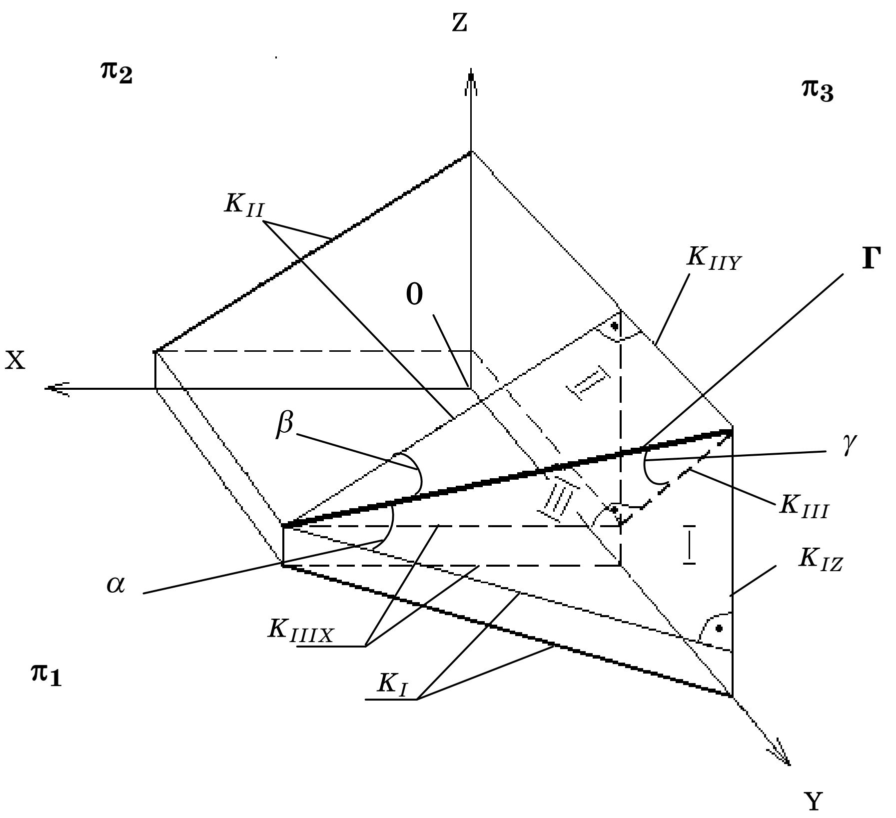

Рисунок 1 - Натуральные прямоугольные треугольники и проекции их катетов в системе « 0 X Y Z »

Рис.1 позволяет определить местоположение всех шести натуральных катетов на эпюрах Монжа, что и проиллюстрировано на рис.2.

Данные рис.1 и рис.2 позволяют определить гипотенузу **Г** аналитически по трем различным формулам:

$$\Gamma = \sqrt{K_I^2 + K_{IZ}^2}, \tag{1}$$

$$\Gamma = \sqrt{K_{II}^2 + K_{IIY}^2}, \tag{2}$$

$$\Gamma = \sqrt{K_{III}^2 + K_{IIIX}^2}\ . \tag{3}$$

Углы наклона отрезка прямой общего положения (гипотенузы **Г**) к плоскостям проекций π_1 , π_2 и π_3 отмечены на рис.1 символами α, β и γ .

Натуральные катеты (рис.2) позволяют определить углы наклона гипотенузы **Г** к соответствующим плоскостям проекций аналитически:

$$\alpha = arctg\frac{K_{IZ}}{K_I}\ , \tag{4}$$

$$\beta = arctg\frac{K_{IIY}}{K_{II}}\ , \tag{5}$$

$$\gamma = arctg\frac{K_{IIIX}}{K_{III}}. \tag{6}$$

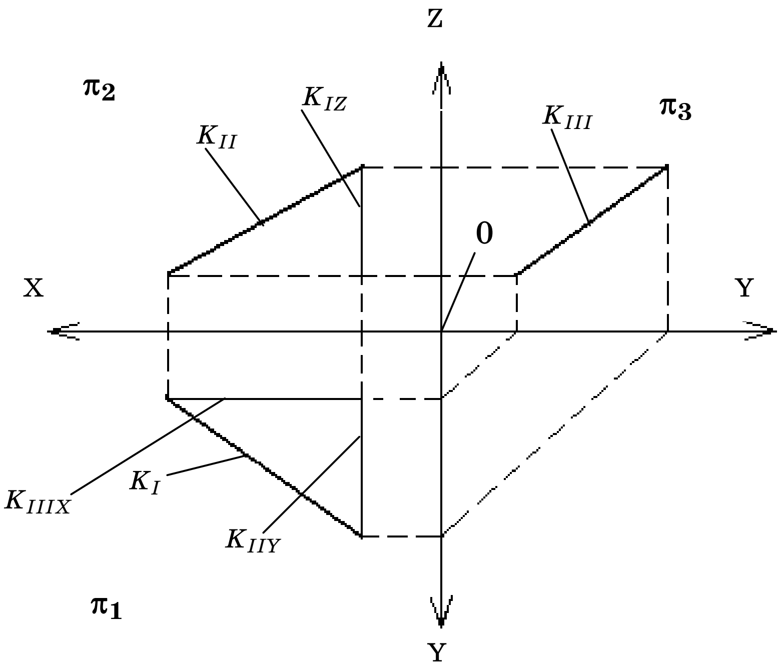

Рисунок 2 - Шесть натуральных катетов в проекциях на плоскости π_1, π_2 и π_3

Пример графического решения по нахождению гипотенузы **Г** с помощью катетов K_I и K_{IZ} приведен на рис.3. Катет K_I сопрягается с катетом K_{IZ} методом переноса с плоскости π_1 на плоскость π_2 (перенос условно показан криволинейной стрелкой). В результате получаем гипотенузу **Г** и угол α наклона гипотенузы **Г** к плоскости π_1 по методу Монжа (первый метод).

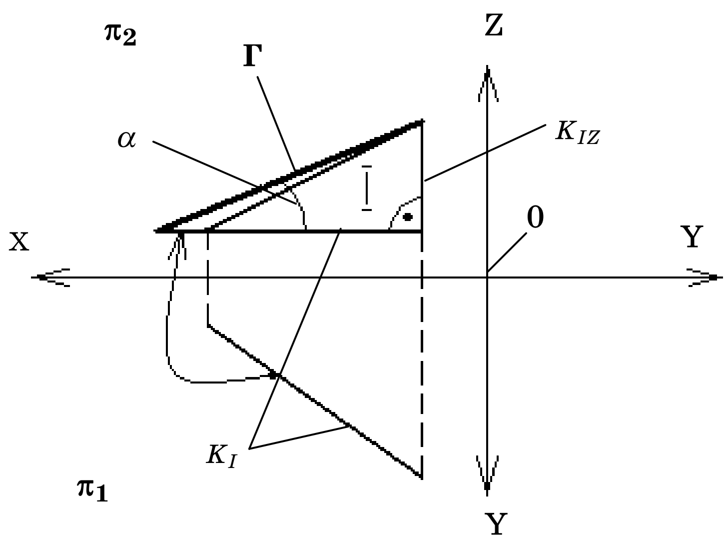

*Рисунок 3 - Графическое нахождение гипотенузы **Г** и угла α с помощью катетов K_I и K_{IZ} (первый метод)*

Другой пример графического решения по нахождению НВ отрезка прямой общего положения (гипотенузы **Г**) с помощью натуральных катетов K_{IZ} и K_I приведен на рис.4 (второй метод).

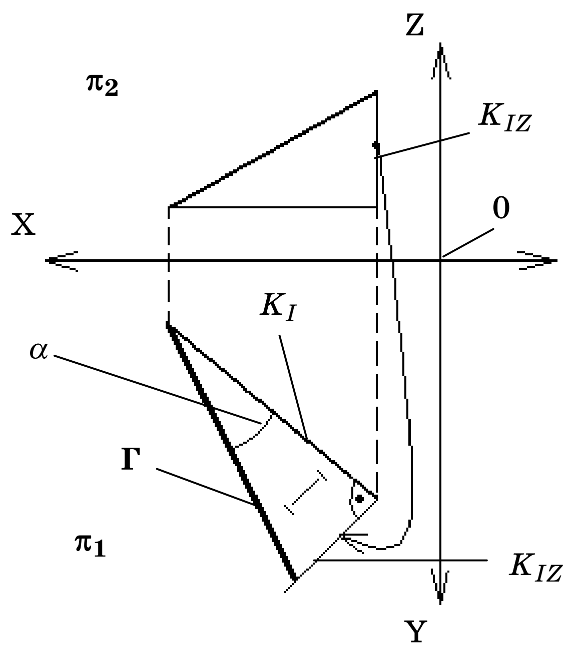

Рисунок 4 - Второй метод нахождения гипотенузы Г и угла α с помощью катетов KI и KIZ

Катет K_{IZ} переносим с плоскости π_2 на плоскость π_1 и сопрягаем его с катетом K_I. Данное решение отражает суть «метода прямоугольного треугольника»[2,3,4].

Отметим, что «метод Монжа» более удобен при решении практических задач по нахождению НВ отрезка прямой общего положения, а «метод прямоугольного треугольника» более целесообразен при решении позиционных и метрических задач[2].

Рис.5 иллюстрирует нахождение гипотенузы **Г** и угла β ее наклона к плоскости π_2 при помощи катетов K_{II} и K_{IIY}. На этом же рисунке показано нахождение гипотенузы **Г** и угла γ ее наклона к плоскости π_3 при помощи катетов K_{III} и K_{IIIX}.

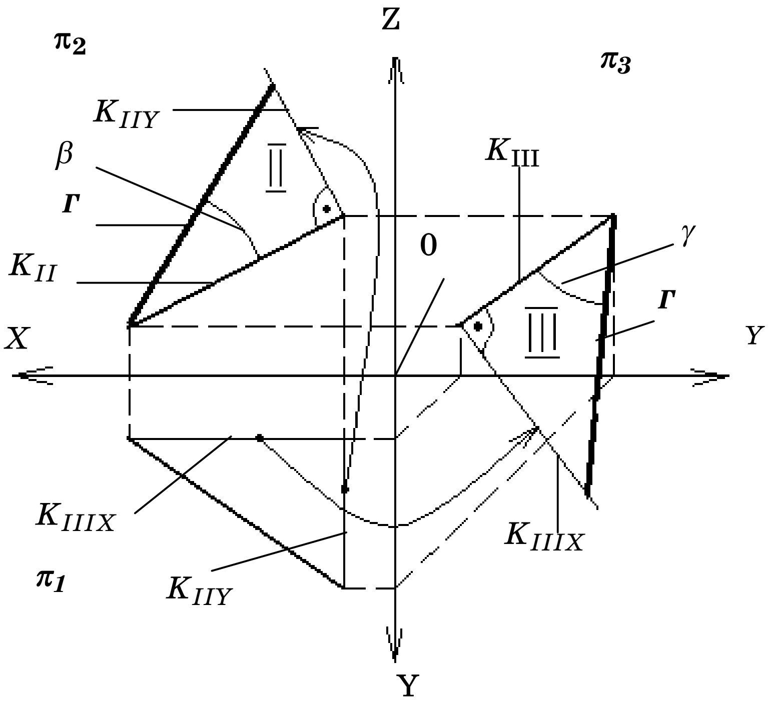

Рисунок 5 - Нахождение НПТ II и НПТ III на плоскостях проекций π_2 и π_3

Применение «метода Монжа» возможно и с использованием катетов K_{IIY} и K_{II}, решение получим на плоскости π_1 (построим НПТ II), и с использованием катетов K_{IIIX} и K_{III}, решение получим также на плоскости π_1 (построим НПТ III).

Сформулируем ***следствия теории натуральных прямоугольных треугольников.***

1 Если K_{IZ} = 0, а K_{IIY} и K_{IIIX} не равны нулю, то получим прямую частного положения *горизонталь*.

2 Если K_{IIY} = 0, а K_{IZ} и K_{IIIX} не равны нулю, то получим прямую частного положения *фронталь*.

3 Если $K_{IZ} = K_{IIY} = 0$, а $K_{IIIX} \neq 0$, то получим прямую частного положения, параллельную плоскостям π_1 и π_2 , и перпендикулярную к π_3.

4 Если $K_{IZ} = K_{IIY} = K_{IIIX} = 0$, то прямая общего положения стягивается в точку.

ВЫВОДЫ

1 Разработана аналитико-геометрическая теория натуральных прямоугольных треугольников (НПТ), применимая в проективной (начертательной) геометрии.

2 Получены новые аналитические зависимости для нахождения натуральной величины отрезка прямой общего положения, а также углов его наклона к трем взаимно перпендикулярным плоскостям проекций.

3 Приведены графические иллюстрации по нахождению натуральной гипотенузы **Г**, конгруэнтной отрезку прямой общего положения, с помощью шести натуральных катетов: K_I , K_{II} , K_{III} , K_{IZ} , K_{IIY} , K_{IIIX} .

4 Теоретически обоснованы известные графические «метод Монжа» и “метод прямоугольного треугольника”, применяемые для нахождения натуральной величины отрезка прямой общего положения.

5 Определены теоретические условия существования прямых линий общего и частных положений, в том числе *горизонтали* и *фронтали* .

SUMMARY

THEORY OF NATURAL RIGHT TRIANGLES

D.P. Dryagin

Sumy State University, 2, R.- Korsakov St., Sumy, 40007, Ukraine

New analytical and geometrical theory of three natural right triangles, which is necessary for finding value of the straight-line segment of common position, which is located in 3-dimensional space is developed. Well-known graphic ‘Monge method” and “method of right triangle” are theoretically proved there.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Monge. La geometrie descriptive. 3ed. – Paris, 1811. - p.IX.
2. Фролов С.А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.
3. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. – М.: Наука, 1988. – 272 с.
4. Михайленко В.Є., Ванін В.В., Ковальов С.М. Інженерна графіка. - Київ-Львів: Каравела-Новий Світ, 2002.- 333 с.

Поступила в редакцию 19 сентября 2005 г.